Multivariate translationsinvariante Räume

Ronny Bergmann

Institut für Mathematik
Universität zu Lübeck

5. Februar 2011

21. Rhein-Ruhr-Workshop in Königswinter

Inhalt

Einleitung - Motivation

Im Eindimensionalen

- Verschiebung $2\pi/N$
- Charakterisierung der (Unter-)Räume im Frequenzbereich
- periodische Wavelets ([Se98], [PT95])

Im Mehrdimensionalen darauf aufbauend

- Charakterisierung der (Unter-)Räume
- (wie immer) Umgang mit dem „Curse of Dimension“
- (adaptive Berücksichtigung von Richtung(en)

$\Rightarrow$ nicht nur Tensorprodukt

Einleitung - Notation

Betrachten Funktionen $f, g : \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$,
auf dem $\mathbb{T}^d \cong [0, 2\pi)^d$ d-dimensionalen Torus.

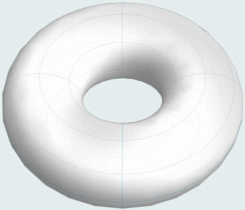


Bild des $\mathbb{T}^2$

Mit

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} \, d\mathbf{x}$$

ist $L^2(\mathbb{T}^d) := \{ f \,|\, \langle f, f \rangle < \infty \}$ ein Hilbertraum.

Jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$ kann als Fourier-Reihe geschrieben werden

$$f = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}}(f) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}^T \circ} \quad \text{mit} \quad c_{\mathbf{k}}(f) = \langle f, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}^T \circ} \rangle$$

Parsevalsche Gleichung: $\langle f, g \rangle = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}}(f) \overline{c_{\mathbf{k}}(g)}$, $\quad \mathbf{c}(f) = (c_{\mathbf{k}}(f))_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \in l^2(\mathbb{Z}^d)$

Das Muster und die erzeugende Gruppe

Sei $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d\times d}$ eine reguläre Matrix, $m := |\det \mathbf{M}| > 0$.

Das Gitter $\Lambda(\mathbf{M}) = \mathbf{M}^{-1}\mathbb{Z}^d = \{\mathbf{y} | \mathbf{M}\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d\}$ ist 1−periodisch.

Definition

Für eine reguläre Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d\times d}$ heißt $\mathcal{P}(\mathbf{M}) := \Lambda(\mathbf{M}) \cap [0,1)^d$ das Muster zur Matrix $\mathbf{M}$

- $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ ist ein Repräsentantensystem bezüglich $+ \bmod \mathbf{I}$
- $(\mathcal{P}(\mathbf{M}), + \bmod \mathbf{I})$ eine abelsche Gruppe.

Analog: Die erzeugende Gruppe $\mathcal{G}(\mathbf{M}) := \mathbf{M}\mathcal{P}(\mathbf{M})$ mit $+ \bmod \mathbf{M}$,
d.h. es gibt eine eindeutige Zerlegung für $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$:
$\mathbf{k} = \mathbf{h} + \mathbf{M}\mathbf{z}, \quad \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}),\ \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d.$

Verallgemeinerung des 1D: $\mathbf{M} = N \in \mathbb{N}^+$, also $\mathcal{P}(N) = \{\frac{k}{N}, k = 0, \ldots, N-1\}$ und $\mathcal{G}(N) = \{0, 1, \ldots, N-1\}$.

Eigenschaften des Musters

Lemma (Anzahl Elemente)

Es gilt $|\mathcal{P}(\mathbf{M})| = |\det \mathbf{M}| = m$

Beweisidee: Betrachtung des Volumens von $\mathbf{M}^{-1}[0,1)^d$ [BHR93, S.35].

Lemma

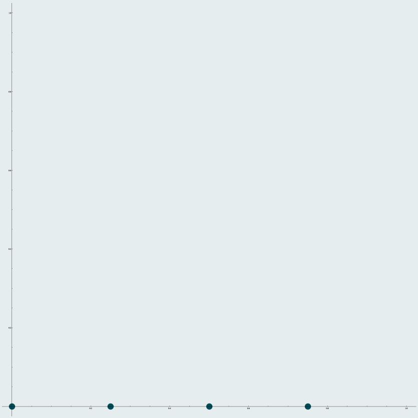
Es gilt: für $\mathbf{M} = \mathbf{JN}$*:* $\mathcal{P}(\mathbf{N}) \subset \mathcal{P}(\mathbf{M})$

Für ein $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$ gilt $\mathbf{Ny} \in \mathbb{Z}^d$ und somit auch $\mathbf{My} = \mathbf{JNy} \in \mathbb{Z}^d$

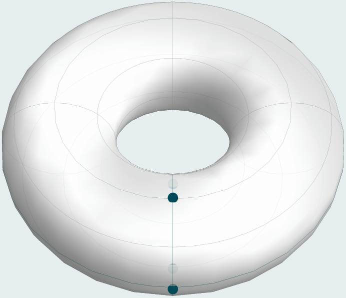
Für $\mathbf{J}$ gilt dies nicht, etwa für $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $\mathcal{P}(\mathbf{J}) \not\subset \mathcal{P}(\mathbf{JN})$

Beispiel

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



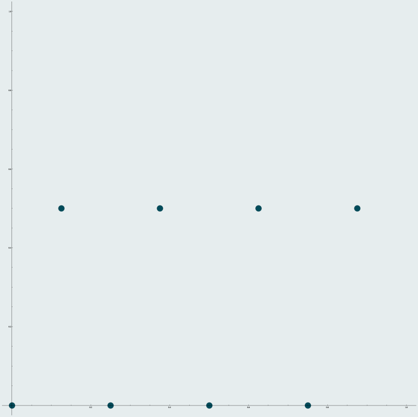
auf $[0,1)^2$



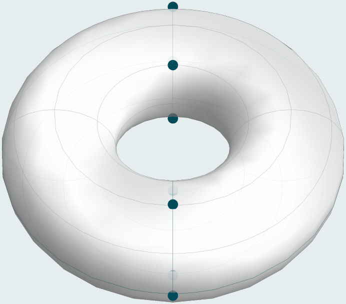
auf $\mathbb{T}^2$

Beispiel

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ (Diagonal)}$$



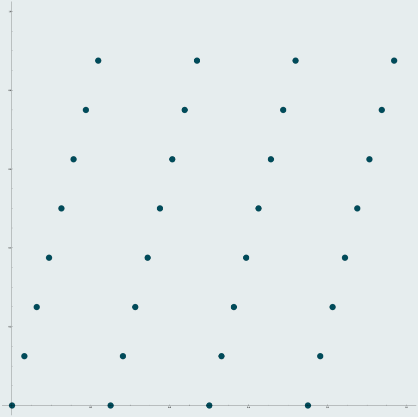
auf $[0,1)^2$



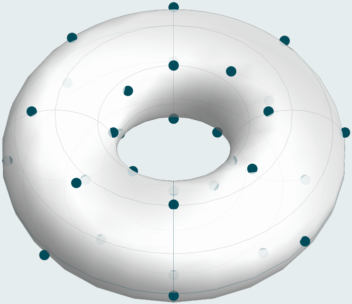
auf $\mathbb{T}^2$

Beispiel

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 16 & 4 \end{pmatrix} \text{ (Skalierung } y\text{)}$$



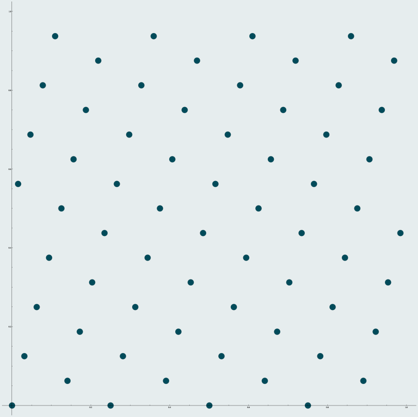
auf $[0,1)^2$



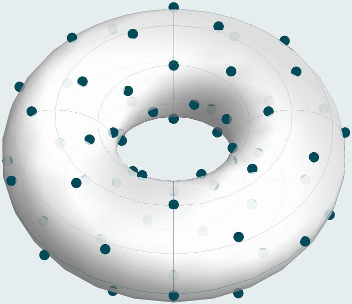
auf $\mathbb{T}^2$

Beispiel

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -12 & -5 \\ 20 & 3 \end{pmatrix} \text{(Diagonal)}$$

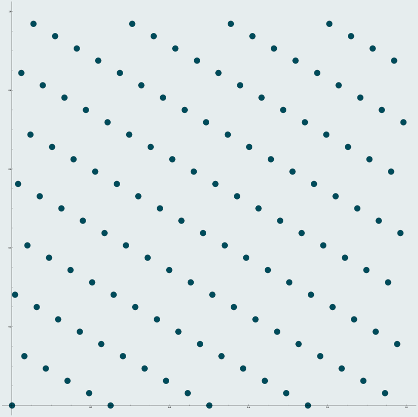


auf $[0,1)^2$



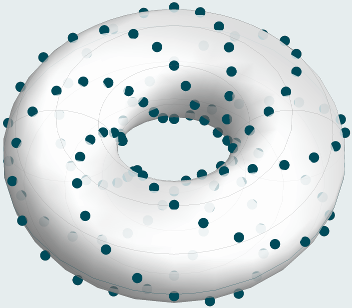
auf $\mathbb{T}^2$

Beispiel



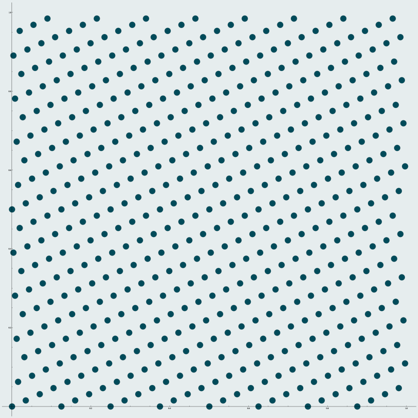
auf $[0,1)^2$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -24 & -10 \\ 20 & 3 \end{pmatrix} \text{ (Skalierung } x\text{)}$$



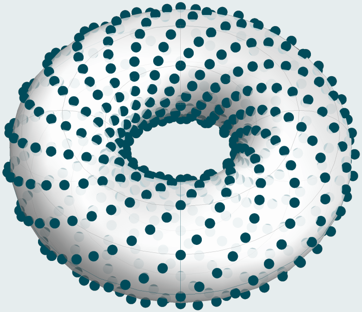
auf $\mathbb{T}^2$

Beispiel



auf $[0,1)^2$

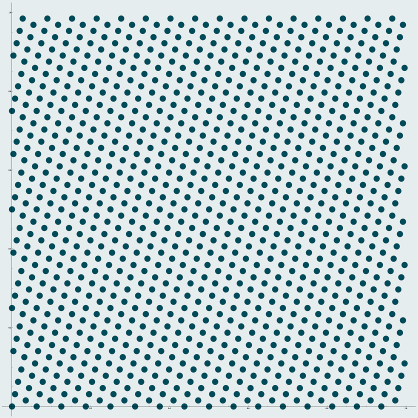
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -24 & -10 \\ 80 & 12 \end{pmatrix} \text{(Skalierung } y\text{)}$$



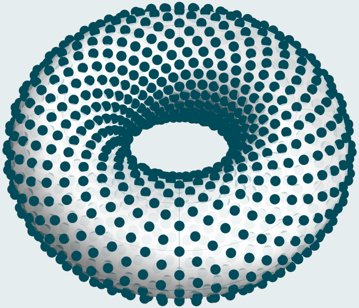
auf $\mathbb{T}^2$

Beispiel

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -48 & -20 \\ 80 & 12 \end{pmatrix} \text{ (Skalierung } x\text{)}$$



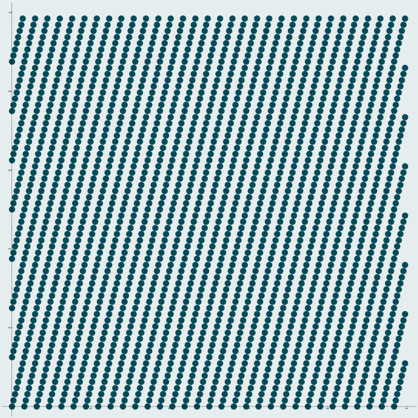
auf $[0,1)^2$



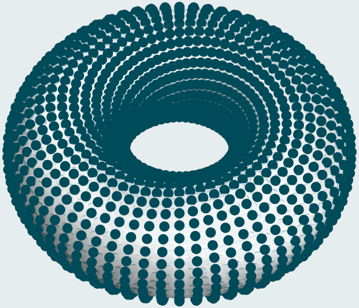
auf $\mathbb{T}^2$

Beispiel

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -128 & -32 \\ 32 & -8 \end{pmatrix} \text{(Diagonal)}$$



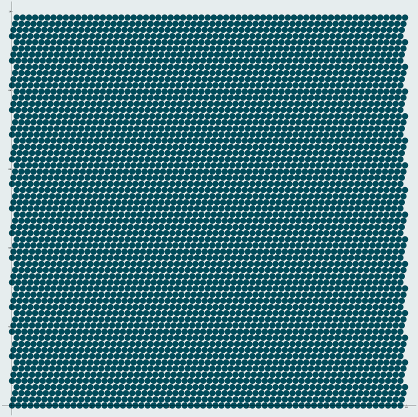
auf $[0,1)^2$



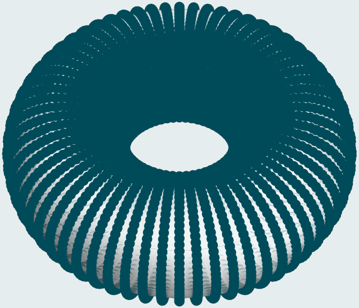
auf $\mathbb{T}^2$

Beispiel

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -128 & -32 \\ 64 & -16 \end{pmatrix} \text{ (Skalierung } y\text{)}$$



auf $[0,1)^2$



auf $\mathbb{T}^2$

Fourier-Transformation

Die Fourier-Matrix auf $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ ist definiert durch [CL94]

$$\mathcal{F}(\mathbf{M}) := \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\mathbf{h}^T\mathbf{y}}\right)_{\mathbf{h}\in\mathcal{G}(\mathbf{M}^T),\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{M})} \in \mathbb{C}^{m\times m}$$

- $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$ adressiert Zeilen
- $\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$ die Spalten
- mit $\mathbf{a} = (a_\mathbf{y})_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{M})} \in \mathbb{C}^m$ (sortiert wie d. Spalten): DFT auf $\mathcal{P}(\mathbf{M})$

$$\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_\mathbf{h})_{\mathbf{h}\in\mathcal{G}(\mathbf{M}^T)} = \sqrt{m}\mathcal{F}(\mathbf{M})\mathbf{a} \in \mathbb{C}^m$$

Für $d = 1$ ist $\quad \mathbf{M} = \mathbf{M}^T = N \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{F}(\mathbf{M})$ die klassische Fourier-Matrix.

Interpretation: $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ entspricht den Abtastpunkten (auf $\mathbb{T}^d$),
$\mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$ den *mehrdimensionalen* Frequenzen ($\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\circ}$: „Welle mit Richtung“)

Zyklen im Muster

Definition

Die Zerlegung $\mathbf{M} = \mathbf{QER}$ mit

- $\mathbf{E} = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$
- $\varepsilon_{j-1} | \varepsilon_j, j = 2, \ldots, d$
- $|\det \mathbf{R}| = |\det \mathbf{Q}| = 1$

heißt Smith-Normalform von $\mathbf{M}$.

Da $\mathbf{R}, \mathbf{Q}$ lediglich einen Basiswechsel vollziehen, gilt
$\mathcal{P}(\mathbf{M}) \cong \mathcal{P}(\mathbf{E}) = \mathcal{C}_{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}_{\varepsilon_d}$, wobei $\mathcal{C}_{\varepsilon_j} = \frac{1}{\varepsilon_j}\mathbf{e}_j\{0, \ldots, \varepsilon_j - 1\}$.

Für nichttriviale Zyklen ($\varepsilon_i > 1$) $\quad \exists \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}) : k\mathbf{y} \equiv \mathbf{0} \bmod \mathbf{I} \Leftrightarrow k = \mathbb{Z}\varepsilon_i$

Somit ist $\mathcal{F}(\mathbf{M}) = \mathbf{P_h} \mathcal{F}_{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{\varepsilon_d} \mathbf{P_y}, \quad \mathcal{F}_\varepsilon = \left(\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} h \varepsilon^{-1} g}\right)_{g,h=0}^{\varepsilon-1}$

Raum der Translate

Mit dem Translationsoperator $T(\mathbf{y})f := f(\circ - 2\pi\mathbf{y}),\ f \in L^2(\mathbb{T}^d), \quad \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$.

Definition

Ein Unterraum $V \subset L^2$ heißt **M**-invariant

$$\forall \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})\ \forall f \in V:\ T(\mathbf{y})f \in V$$

Lemma

Der Raum $V_{\mathbf{M}}^f := \operatorname{span}\{T(\mathbf{y})f, \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})\}$ *ist* ***M****-invariant*

Für ein $g = \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{y}} T(\mathbf{y})f \in V_{\mathbf{M}}^f$ ist für ein bel. $\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$

$$T(\mathbf{x})g = \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{y}} T(\mathbf{x}+\mathbf{y})f = \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{y}-\mathbf{x} \bmod \mathbf{I}} T(\mathbf{y})f \in V_{\mathbf{M}}^f$$

Inklusionsbeziehung der Funktionen

Theorem

$g \in V^f_{\mathbf{M}}$ ist erfüllt, genau dann, wenn ein Vektor $\mathbf{a} = (a_{\mathbf{y}})_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{M})}$ mit diskreter Fourier-Transformierten $\hat{\mathbf{a}} = \sqrt{m}\mathcal{F}(\mathbf{M})\mathbf{a}$ existiert und für diesen gilt

$$c_{\mathbf{k}+\mathbf{Mz}}(g) = \hat{a}_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}+\mathbf{Mz}} \text{ für alle } \mathbf{k} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T),\ \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$$

Beweis.

$$g \in V^f_{\mathbf{M}} \Leftrightarrow g = \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{y}} T(\mathbf{y}) f \Leftrightarrow c_{\mathbf{k}}(g) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{y}} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\mathbf{k}^T\mathbf{y}} c_{\mathbf{k}}(f)$$

Zerlegen $\mathbf{k} = \mathbf{h} + \mathbf{M}^T\mathbf{z}$, $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$, $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ und erhalten ($\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\mathbf{z}^T\mathbf{My}} = 1$)

$$\Leftrightarrow c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}^T\mathbf{z}}(g) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{y}} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\mathbf{h}^T\mathbf{y}} c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}^T\mathbf{z}}(f) = \hat{a}_{\mathbf{h}} c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}^T\mathbf{z}}(f)$$

□

Zusammenfassung & Ausblick

- Richtungspräferenz im Mehrdimensionalen durch Muster
- Charakterisierung der (Unter-)Räumen
- Berechnungen/Enthaltenseinsbeziehung im Frequenzbereich

Möglich sind

- ein *dyadisches* mulativariates Waveletsystem
- (adaptive) Richtungspräferenz durch Teilmuster und Waveletfunktionen
- schnelle Algorithmen (FFT, Zerlegung)

Herausforderung:

- Verallgemeinerung der de-La-Vallée-Poussin-Mittel
- Anforderungen/Eigenschaften der Wavelet- und Skalierungsfunktionen

Literatur

[BHR93] C. de Boor, K. Höllig, S. Riemenschneider: *Box splines*, Springer, 1993, ISBN 0– 387–94101–0

[CL94] C.K. Chui, C. Li: *A general framework of multivariate wavelets with duals*, ACHA 1-4 / 1994 p.368–390

[LP10] D. Langemann, J. Prestin: *Multivariate Periodic Wavelet Analysis*, ACHA 28-1 / 2010 p. 46–66

[PT95] G. Plonka, M. Tasche: *On the computation of periodic spline wavelets*, ACHA 2-1 / 1995 p. 1–14

[Se98] K. Selig: *periodische Wavelet-Packets und eine gradoptimale Schauderbasis*, Dissertation, Universität Rostock, Shaker Verlag 1998

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit.