Die multivariate periodische Wavelet-Transformation

auf anisotropen regelmäßigen Mustern

Ronny Bergmann

Institut für Mathematik
Universität zu Lübeck

27. Mai 2011, Osnabrück

32. Norddeutsches Kolloquium über Angewandte Analysis
und Numerische Mathematik

Inhalt

Einleitung - Motivation

Im Eindimensionalen

- Verschiebung $2\pi/N$
- periodische Wavelets [PT95]
- schnelle Algorithmen [Se98]

Im Mehrdimensionalen darauf aufbauend

- periodische Wavelets mit Richtungsbezug

$\Rightarrow$ nicht nur Tensorprodukt

- anisotrope Fourier- und Wavelet-Transformation
- (wie immer) Umgang mit dem „Curse of Dimension"

? Anordnung der Elemente (etwa für FFT)

Einleitung - Notation

Betrachten Funktionen $f, g : \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$ auf dem d-dimensionalen Torus $\mathbb{T}^d \cong [0, 2\pi)^d$

Mit

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})\overline{g(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x}$$

ist $L^2(\mathbb{T}^d) := \{ f \,|\, \langle f, f \rangle < \infty \}$ ein Hilbertraum.

Beschreiben eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$ durch ihre Fourier-Reihe

$$f = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}}(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}^T \circ} \quad \text{mit} \quad c_{\mathbf{k}}(f) = \langle f, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}^T \circ} \rangle$$

Parsevalsche Gleichung: $\langle f, g \rangle = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}}(f)\overline{c_{\mathbf{k}}(g)}, \quad \mathbf{c}(f) = (c_{\mathbf{k}}(f))_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \in l^2(\mathbb{Z}^d)$

Das Muster und die erzeugende Gruppe

Sei $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}^{d\times d}$ regulär. Das Gitter $\Lambda(\mathbf{M}) := \mathbf{M}^{-1}\mathbb{Z}^d$ ist 1-periodisch.
Definieren *das Muster* $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ als Restklassenrepräsentanten bzgl. $+$ mod $\mathbf{I}$, etwa

$$\mathcal{P}(\mathbf{M}) := \Lambda(\mathbf{M}) \cap [0,1)^d.$$

Es entsteht die eindeutige Zerlegung für $\mathbf{x} \in \Lambda(\mathbf{M})$

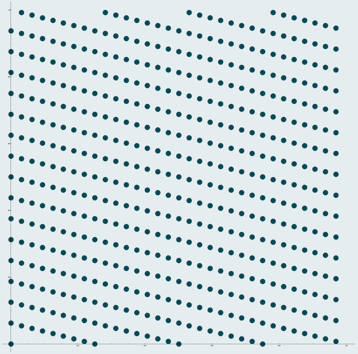
$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}, \quad \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}),\ \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d.$$

Analog ist *die erzeugende Gruppe* $\mathcal{G}(\mathbf{M}) := \mathbf{M}\mathcal{P}(\mathbf{M})$ ein Repräsentantensystem bzgl. $+$ mod $\mathbf{M}$ auf $\mathbb{Z}^d$,
d.h. für $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^d$ existiert die eindeutige Zerlegung

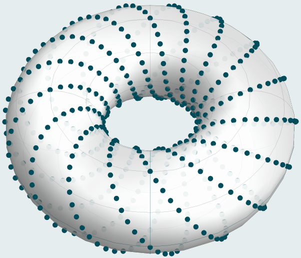
$$\mathbf{k} = \mathbf{h} + \mathbf{M}\mathbf{z}, \quad \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}),\ \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$$

Beispiel: Muster auf dem Torus

Für die Matrix $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ -16 & 64 \end{pmatrix}$ ergibt sich folgendes Muster



auf $[0, 1)^2$



auf $\mathbb{T}^2$

Die Fourier-Transformation auf dem Muster

Die Fourier-Matrix auf $\mathcal{P}(\mathbf{M})$, $m = |\det \mathbf{M}| > 0$ ist definiert durch [CL94]

$$\mathcal{F}(\mathbf{M}) := \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\, \mathbf{h}^T \mathbf{y}} \right)_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T), \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} \in \mathbb{C}^{m \times m}$$

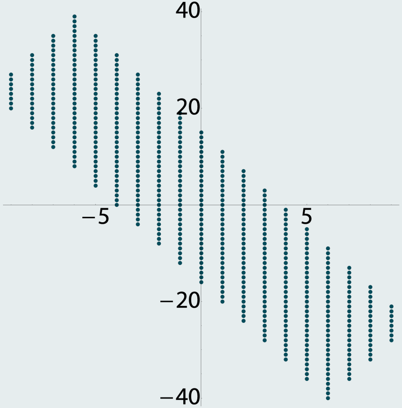
Für einen Vektor $\mathbf{a} = (a_{\mathbf{y}})_{\mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})} \in \mathbb{C}^m$ DFT auf $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ ist

$$\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_{\mathbf{h}})_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)} = \sqrt{m} \mathcal{F}(\mathbf{M}) \mathbf{a} \in \mathbb{C}^m,$$

falls $\mathbf{a}$ angeordnet ist, wie die Spalten von $\mathcal{F}(\mathbf{M})$.

Beispiel: Erzeugende Gruppe (Menge der Frequenzen)

Für die Matrix $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ -16 & 64 \end{pmatrix}$ ergibt sich $\mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$ zu



Die Smith-Normalform und Zyklen im Muster

Die *Smith-Normalform* $\mathbf{M} = \mathbf{QER}$ ist die Zerlegung von $\mathbf{M}$ mit $\mathbf{E} = \operatorname{diag}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_d)$, wobei $\epsilon_{j-1}|\epsilon_j$, $j = 2, \ldots, d$ die Elementarteiler von $\mathbf{M}$ sind, und $|\det \mathbf{R}| = |\det \mathbf{Q}| = 1$ (Basiswechselmatrizen).

Es gilt $\mathcal{P}(\mathbf{M}) \cong \mathcal{P}(\mathbf{E}) = \mathcal{C}_{\epsilon_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}_{\epsilon_d}$, wobei $\mathcal{C}_{\epsilon_j} = \frac{1}{\epsilon_j}\mathbf{e}_j\{0, \ldots, \epsilon_j - 1\}$.
Insbesondere $|\mathcal{P}(\mathbf{M})| = |\mathcal{P}(\mathbf{E})| = \det \mathbf{E} = |\det \mathbf{M}|$

Auf $\mathcal{F}(\mathbf{M})$ angewandt ergibt dies [LP10]

$$\mathcal{F}(\mathbf{M}) = \mathbf{P_h}\mathcal{F}_{\epsilon_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{\epsilon_d}\mathbf{P_y}, \quad \mathcal{F}_\epsilon = \left(\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\, h\epsilon^{-1}g}\right)_{g,h=0}^{\epsilon-1},$$

wobei $\mathbf{P_h}, \mathbf{P_y}$ Permutationsmatrizen sind.

Ziel: Eine Anordnung, so dass $\mathbf{P_h} = \mathbf{P_y}$ identisch zur Einheitsmatrix sind.

Basis für das Muster

Sei $k = \#\{i, \epsilon_i > 1\}|$ und $\mathbf{E}' = \operatorname{diag}(\epsilon_{d-k+1}, \ldots, \epsilon_d)$. Die Vektoren

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{R}^{-1} \frac{1}{\epsilon_{d-k+j}} \mathbf{e}_{d-k+j} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}), \quad j = 1, \ldots, k$$

sind linear unabhängig ($\det \mathbf{R} \neq 0$) und für ganzzahlige λ_j gilt

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{y}_j \equiv \mathbf{0} \bmod \mathbf{I} \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{E}'\mathbb{Z}^k$$

Zu jedem $\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$ existiert also genau ein
$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{j=1}^k \in [0, 1, \ldots, \epsilon_{d-k+1} - 1] \times \cdots \times [0, \ldots, \epsilon_d - 1]$ so dass

$$\mathbf{x} \equiv \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{y}_j \bmod \mathbf{I},$$

$\Rightarrow$ lexikografische Anordnung der $\boldsymbol{\lambda}$ ist eine mögliche Anordnung von $\mathcal{P}(\mathbf{M})$

Die schnelle Fourier-Transformation auf dem Muster

Analog zu $\mathbf{y}_j$ ist eine Basis für $\mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$ gegeben durch $\mathbf{h}_j = \mathbf{R}^T\mathbf{e}_{d-k+j}$

Dann gilt

$$\langle \mathbf{h}_j, \mathbf{y}_j \rangle = \langle \mathbf{R}^T\mathbf{e}_{d-k+j}, \mathbf{R}^{-1}\frac{1}{\epsilon_{d-k+j}}\mathbf{e}_{d-kj} \rangle = \langle \frac{1}{\epsilon_j}\mathbf{e}_j, \mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{e}_j \rangle = \frac{1}{\epsilon_{d-k+j}}, \quad j = 1, \ldots, k$$

und somit für die eine lexikografische Anordnung der $\boldsymbol{\lambda}$ per Induktion über k

$$\mathcal{F}(\mathbf{M}) = \mathcal{F}_{\epsilon_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{\epsilon_d} = \mathcal{F}_{\epsilon_{d-k+1}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{\epsilon_d}$$

$\Rightarrow$ verallgemeinerter Row-Column-Algorithmus für $\mathcal{F}(\mathbf{M})\mathbf{a}$.

Translationsinvariante Räume I

Ein Raum V heißt $\mathbf{M}$-invariant, falls

$$g \in V \Rightarrow T(\mathbf{y})g := g(\circ - 2\pi\mathbf{y}) \in V, \quad \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M}).$$

Für $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$ ist der Raum der Translate $V_{\mathbf{M}}^f := \operatorname{span}\{T(\mathbf{y})f, \mathbf{y} \in \mathcal{P}(\mathbf{M})\}$ $\mathbf{M}$-invariant.

Mit einer Zerlegung $\mathbf{M} = \mathbf{JN}, \quad \mathbf{J}, \mathbf{N} \in \mathbb{Z}^{d\times d}$
ist $\mathcal{P}(\mathbf{N}) \subset \mathcal{P}(\mathbf{M})$, da $\mathbf{Nz} \in \mathbb{Z}^d \Rightarrow \mathbf{Mz} \in \mathbb{Z}^d$.
$\Rightarrow$ Für $g \in V_{\mathbf{M}}^f$ ist $V_{\mathbf{N}}^g$ ein Unterraum von $V_{\mathbf{M}}^f$.

$\mathbf{J}$ heißt *Dilatationsmatrix*.

Im Folgenden seien $|\det \mathbf{J}| = 2$ und f, g derart gewählt, dass die jeweiligen Translate linear unabhängig sind, d.h. $\dim V_{\mathbf{M}}^f = m = |\det \mathbf{M}|$ und $\dim V_{\mathbf{N}}^g = n = |\det \mathbf{N}| = \frac{m}{2}$.

Translationsinvariante Räume II

$$g \in V_{\mathbf{M}}^{f} \Leftrightarrow g = \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{y}} T(\mathbf{y}) f$$

$$\Leftrightarrow c_{\mathbf{k}}(g) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{y}}\, \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\mathbf{k}^T\mathbf{y}}\, c_{\mathbf{k}}(f), \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$$

Zerlegen $\mathbf{k} = \mathbf{h} + \mathbf{M}^T\mathbf{z}$, $\mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$, $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ und erhalten ($\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\mathbf{z}^T\mathbf{M}\mathbf{y}} = 1$)

$$\Leftrightarrow c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}^T\mathbf{z}}(g) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{M})} a_{\mathbf{y}}\, \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\mathbf{h}^T\mathbf{y}}\, c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}^T\mathbf{z}}(f)$$

$$= \hat{a}_{\mathbf{h}} c_{\mathbf{h}+\mathbf{M}^T\mathbf{z}}(f), \quad \mathbf{h} \in \mathcal{G}(\mathbf{M}^T), \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$$

Die Wavelet-Transformation I

Verwenden nun die Darstellung von g um den Vektor der Translate $\left(T(\mathbf{y})g\right)_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{N})}$ (Basis von $V_{\mathbf{N}}^{g}$) in $V_{\mathbf{M}}^{f}$ darzustellen.

Theorem

Es gilt

$$\overline{\mathcal{F}(\mathbf{N})}\left(T(\mathbf{y})g\right)_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{N})} = \sqrt{\frac{n}{m}}\mathbf{A}\overline{\mathcal{F}(\mathbf{M})}\left(T(\mathbf{y})f\right)_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{M})}. \tag{1}$$

wobei für eine bestimmte Anordnung der Elemente von $\mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$ *gilt*

$$\mathbf{A} = \left(diag\left(\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{J}^T\mathbf{l}}\right)_{\mathbf{h}\in\mathcal{G}(\mathbf{N}^T)}\right)_{\mathbf{l}\in\mathcal{G}(\mathbf{J}^T)} \in \mathbb{C}^{n\times m} \tag{2}$$

und $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ *diejenigen von der vorherigen Folie sind.*

Die Wavelet-Transformation II

Beweisidee. (nach [LP10]).

Stellen $T(\mathbf{y})g$ in seiner Fourier-Reihe dar:

$$\overline{\mathcal{F}(\mathbf{N})}\,\big(T(\mathbf{y})g\big)_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{N})} = \overline{\mathcal{F}(\mathbf{N})}\left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{k}}(g)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}^T\circ-2\pi\,\mathrm{i}\,\mathbf{k}^T\mathbf{y}}\right)_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{N})}$$

Zerlegen $\mathbf{k}$ bzgl. $\mathbf{N}^T$ zu $\mathbf{h}+\mathbf{N}^T\mathbf{k}$, $\quad \mathbf{h}\in\mathcal{G}(\mathbf{N}^T), \mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d$ und erhalten

$$= \overline{\mathcal{F}(\mathbf{N})}\left(\sum_{\mathbf{h}\in\mathcal{G}(\mathbf{N}^T)} \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\mathbf{h}^T\mathbf{y}} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{h}+\mathbf{N}^T\mathbf{k}}(g)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{h}^T+\mathbf{k}^T\mathbf{N})\circ}\right)_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{N})}$$

Zerlegen $\mathbf{N}^T\mathbf{k}$ bzgl. $\mathcal{G}(\mathbf{J}^T)$ zu $\mathbf{N}^T(\mathbf{l}+\mathbf{J}^T\mathbf{k})$ und stellen g in $V_{\mathbf{M}}^f$ dar

$$\sqrt{\frac{n}{m}}\sqrt{m}\left(\sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{G}(\mathbf{J}^T)} \hat{a}_{\mathbf{h}+\mathbf{N}^T\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{h}+\mathbf{N}^T\mathbf{l}+\mathbf{M}^T\mathbf{k}}(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{h}^T+\mathbf{g}^T\mathbf{N}+\mathbf{k}^T\mathbf{M})\circ}\right)_{\mathbf{h}\in\mathcal{G}(\mathbf{N}^T)}$$

□

Die Wavelet-Transformation III

Betrachtet man nun für $\mathbf{M} = \mathbf{J}\mathbf{N}$, $\left|\det \mathbf{J}\right| = 2$ die Formel (1) mit

- $f = \varphi_{\mathbf{M}}$ als Skalierungsfunktion
- für g je $\varphi_{\mathbf{N}}, \psi_{\mathbf{N}}$, so dass $\langle T(\mathbf{x})\varphi_{\mathbf{N}}, T(\mathbf{y})\psi_{\mathbf{N}}\rangle = 0$
- $\tau \in V_{\mathbf{M}}^{\varphi_{\mathbf{M}}} \Rightarrow \tau = \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{M})} b_{\mathbf{y}} T(\mathbf{y})\varphi_{\mathbf{M}}$ als zu zerlegende Funktion

$\Rightarrow$ auf R.S. Funktionenvektor $\left(b_{\mathbf{y}} T(\mathbf{y}) f\right)_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{M})}$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Translate ist $V_{\mathbf{M}}^{\varphi_{\mathbf{M}}} = V_{\mathbf{N}}^{\varphi_{\mathbf{N}}} \oplus V_{\mathbf{N}}^{\psi_{\mathbf{N}}}$.

Durch Anwendung von (1) entsteht die Zerlegung
$\tau = \tau_1 + \tau_2$ mit $\tau_1 \in V_{\mathbf{N}}^{\varphi_{\mathbf{N}}}$, $\tau_2 \in V_{\mathbf{N}}^{\psi_{\mathbf{N}}}$, also $\langle \tau_1, \tau_2\rangle = 0$

Die schnelle Wavelet-Transformation

Ist τ gegeben als $(\hat{b}_{\mathbf{k}})_{\mathbf{h}\in\mathcal{G}(\mathbf{M}^T)}$, also $c_{\mathbf{k}+\mathbf{M}^T\mathbf{z}}(\tau) = \hat{b}_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}+\mathbf{M}^T\mathbf{z}}(\varphi_{\mathbf{M}})$, vereinfacht sich wegen (2) die Zerlegung (1) zur Summe.

Mit der Anordnung aus den FFTs
$\Rightarrow$ schneller Zugriff auf die Elemente $\hat{d}$ in L.S. $(\overline{\mathcal{F}(\mathbf{N})}\left(d_{\mathbf{y}}T(\mathbf{y})g\right)_{\mathbf{y}\in\mathcal{P}(\mathbf{N})}$
Zusammen mit Adressierung der $\mathbf{N}^T\mathbf{l}, \mathbf{l} \in \mathcal{G}(\mathbf{J}^T)$ in $\mathcal{G}(\mathbf{M}^T)$

$\Rightarrow$ $O(n)$ einfach implementierbar (Tensorprodukt, bis auf „Offset-Schritt" $\mathbf{N}^T\mathbf{l}$).

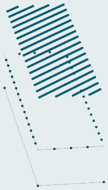
$\oplus$ „Änderung der Adressierung" von $\mathbf{N}^T\mathbf{l}$ kann zur Richtungsklassifikation genutzt werden
$\Rightarrow$ Verallgemeinerung der 1D-Skalierungseigenschaft [Se98]

Beispiel: Der Dirichlet-Fall

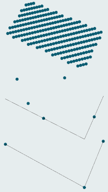
Sei $r(\mathbf{k})$ die Anzahl Ränder von $[0,1]^2$, auf denen $\mathbf{M}^{-T}\mathbf{k}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$ liegt.
Definieren $\varphi_{\mathbf{M}}$ durch die Fourier-Koeffizienten:

$$c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{M}}) := \begin{cases} 2^{-r(\mathbf{k})/2} & \text{falls } \mathbf{M}^{-T}\mathbf{k} \in [0,1]^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

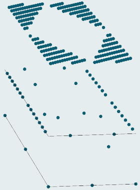
Analog definieren wir $\varphi_{\mathbf{N}}$. Für $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ -16 & 64 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sind



$c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{M}})$



$c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{N}})$



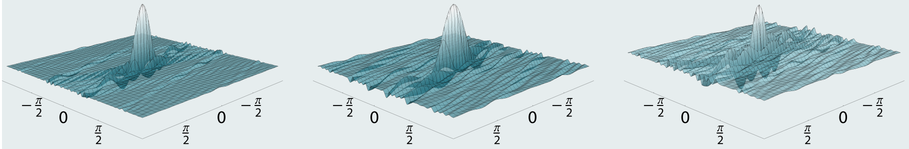
$c_{\mathbf{k}}(\psi_{\mathbf{N}})$

Beispiel: Der Dirichlet-Fall

Sei $r(\mathbf{k})$ die Anzahl Ränder von $[0,1]^2$, auf denen $\mathbf{M}^{-T}\mathbf{k}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$ liegt.
Definieren $\varphi_{\mathbf{M}}$ durch die Fourier-Koeffizienten:

$$c_{\mathbf{k}}(\varphi_{\mathbf{M}}) := \begin{cases} 2^{-r(\mathbf{k})/2} & \text{falls } \mathbf{M}^{-T}\mathbf{k} \in [0,1]^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Analog definieren wir $\varphi_{\mathbf{N}}$. Für $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ -16 & 64 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sind



$\varphi_{\mathbf{M}}$ $\varphi_{\mathbf{N}}$ $\psi_{\mathbf{N}}$

Zusammenfassung

- Durch die Muster entsteht eine Fourier-Transformation mit Richtungsbezug
- die vorgestellte Anordnung ermöglicht
  - FFT mit verallgemeinertem Row-Column-Algorithmus
  - eine Wavelet-Transformation in $O(m)$ ($O(2n)$).
- anwendbar auf beliebige Skalierungsfunktionen und dazugehörige Wavelets

Herausforderungen

- Dilatationsmatrizen mit Scherung
- Verallgemeinerung der de-La-Vallée-Poussin-Mittel

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit.

Literatur

[CL94] C.K. Chui, C. Li: *A general framework of multivariate wavelets with duals*, ACHA 1-4 / 1994 p.368–390

[LP10] D. Langemann, J. Prestin: *Multivariate Periodic Wavelet Analysis*, ACHA 28-1 / 2010 p. 46–66

[PT95] G. Plonka, M. Tasche: *On the computation of periodic spline wavelets*, ACHA 2-1 / 1995 p. 1–14

[Se98] K. Selig: *periodische Wavelet-Packets und eine gradoptimale Schauderbasis*, Dissertation, Universität Rostock, Shaker Verlag 1998